個数の処理

(　　)組・番号(　　)氏名(　　　　　　　)NO1

順列

> n 個の異なるものの中から r 個を取り出して 1 列に並べた順列を **n 個のものから r 個取った順列**といい、$_n P_r$ で表す。
> 1 から n までのすべての自然数の積を n の**階乗**といい、
> 記号 **n!** で表す。$_n P_n = n!$ である。ただし、$0! = 1$

1. 540 の正の約数は何個あるか。

$540 = 2^{\boxed{2}} \times 3^{\boxed{3}} \times 5$

したがって、正の約数の個数は　$(\boxed{2}+1)(\boxed{3}+1)(\boxed{1}+1) = \boxed{24}$

正の約数の和は, $(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5) = \boxed{1680}$

2. 次の値を求めよ。

(1) $_7 P_1$ $=7$

(2) $_8 P_5$ $=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$ $=6720$

(3) $_9 P_3$ $=9\cdot8\cdot7$ $=504$

(4) $_5 P_5$ $=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ $=120$

(5) $_6 P_0$ $=1$

3. 次の場合の数を求めよ。

(1) 1.2.3.4.5.6 の 6 個の数字を 1 列に並べる方法　[解] $\boxed{6}! = \boxed{6}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1} = \boxed{720}$

(2) 7 人のうち 5 人が選ばれて 1 列に並ぶ方法　[解] $_{\boxed{7}} P_{\boxed{5}} = \boxed{7}\cdot\boxed{6}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3} = \boxed{2520}$

(3) 5 個の文字 a, b, c, d, e から 3 個を選んで 1 列に並べる方法

[解] $_{\boxed{5}} P_{\boxed{3}} = \boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3} = \boxed{60}$

4. 役員 9 人の中から, 委員長, 副委員長, 書記を各 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるか。
ただし、兼任は認めないものとする。

9 人の中から 3 人を選んで, 委員長, 副委員長, 書記の順に並べればよい。
ゆえに, 並び方の総数は　$_{\boxed{9}} P_{\boxed{3}} = \boxed{9}\cdot\boxed{8}\cdot\boxed{7} = \boxed{504}$

5. 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 つの数字がある。

(1) この中の異なる数字を使ってできる 5 桁の整数は幾つあるか。

(2) 両端の数字が奇数である 4 桁の整数

(1) 万の位の数字は 1, 2, 3, 4, 5 のどれをとってもいいから $\boxed{5}$ 通り
千, 百, 十, 一の位の数字の並べ方は、残りの 5 個の数字から 4 個取って 1 列に並べる方法で
$\boxed{5} \times {}_{\boxed{5}} P_{\boxed{4}} = \boxed{5} \times \boxed{5}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2} = \boxed{600}$ …答

(2) 両端に奇数をおくおき方は 1, 3, 5 から 2 つ選んで並べる順列の個数に等しいので
$_{\boxed{3}} P_{\boxed{2}}$ 通り。百, 十の位の数字の並べ方は、残りの 4 個の数字から 2 個取って
1 列に並べる方法で $_{\boxed{4}} P_{\boxed{2}}$ 通り。
したがって、$_{\boxed{3}} P_{\boxed{2}} \times {}_{\boxed{4}} P_{\boxed{2}} = \boxed{3}\cdot\boxed{2} \times \boxed{4}\cdot\boxed{3} = \boxed{72}$ …答

6. 男子 3 人、女子 2 人が 1 列に並ぶとき、女子 2 人が隣り合う並び方は何通りあるか。

隣り合う女子 2 人を 1 人と考えると、並び方は $\boxed{4}!$ 通り
女子 2 人の並び方が 2 通りあるから、求める並び方は
$2 \times \boxed{4}! = 2 \times \boxed{4}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1} = \boxed{48}$ …答

個数の処理　　(　)組・番号(　)氏名(　　　　)NO2

7. 男子５人、女子３人が１列に並ぶとき、次のような並び方は何通りあるか。

(1) 女子３人が隣り合う。

$3! \times 6! = 4320$ (通り)

(2) 両端が女子である。

${}_3P_2 \times 6! = 4320$ (通り)

順列

円順列

異なるｎ個のものを並べる円順列の総数は　$(n-1)!$

8. ６人が円形のテーブルに着席する方法は何通りあるか。

１人の位置を固定すると $(\boxed{6}-1)! = \boxed{120}$ …答

9. ７人から５人が選ばれて、円形に並ぶ方法は何通りあるか。

７人から５人選ぶ組合せの総数は ${}_{\boxed{7}}C_{\boxed{5}}$ 通り

５人を円形に並べる円順列の総数は $\boxed{4}!$ 通り

したがって、求める方法は　${}_{\boxed{7}}C_{\boxed{5}} \times \boxed{4}! = \boxed{504}$

10. 女子２人と男子４人が円形のテーブルに座るとき次の問に答えよ

(1) 女子が隣り合わせに座る

(2) 女子が隣り合わないように座る

(3) ２人の女子が向かい合う。

(1) 隣り合う女子を１人と考えると、５人の並び方は $(\boxed{5}-1)!$ 通り

女子の席の入れ替えが２通りあるから、並び方の総数は　$(\boxed{5}-1)! \times \boxed{2} = \boxed{48}$ …答

(2) 全体の並び方から、女子が隣り合う場合を引けばよいから $\boxed{5}! - \boxed{48} = \boxed{72}$ …答

(3) １人の女子の位置を固定すると、向かい合う女子の位置は１通りに決まるので、$\boxed{4}! = \boxed{24}$

重複順列

異なるｎ個のものからｒ個とった重複順列の総数は　n^r

11. 同じ数字を繰り返し用いることを許して、３桁の整数をつくるとき次の場合に３桁の整数は何個できるか。

(1) 1,2,3,4 の４個の数字を用いる場合

(2) 0,1,2,3 の４個の数字を用いる場合。

(1) $\boxed{4}^{\boxed{3}} = \boxed{64}$ …答　　(2) $\boxed{3} \times \boxed{4}^{\boxed{2}} = \boxed{48}$

個数の処理　　(　)組・番号(　)氏名(　　　　　　)NO3

組合せ

> n 個の異なるものの中から r 個を取り出して1組としたものを
> **n 個のものから r 個取った組合せ**といい、${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。
> ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$ である。　　${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

1. 次の値を求めよ。

(1) ${}_5\mathrm{C}_1$
$=5$

(2) ${}_8\mathrm{C}_5$
$= {}_8\mathrm{C}_3 = \dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$

(3) ${}_9\mathrm{C}_3$
$= \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$

(4) ${}_5\mathrm{C}_5$
$=1$

(5) ${}_9\mathrm{C}_8 = {}_{\boxed{9}}\mathrm{C}_{\boxed{1}}$
$=9$

(6) ${}_n\mathrm{C}_3$
$= \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

2. 次の場合の数を求めよ。

(1) １０色の色鉛筆から３色の色鉛筆を選ぶ方法　[解] ${}_{\boxed{10}}\mathrm{C}_{\boxed{3}} = \dfrac{\boxed{10}\cdot\boxed{9}\cdot\boxed{8}}{\boxed{3}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{1}} = \boxed{120}$

(2) ７人のうち５人を選ぶ方法　[解] ${}_{\boxed{7}}\mathrm{C}_{\boxed{5}} = \boxed{21}$

(3) 正八角形の八個の頂点のうちの４個を頂点とする四角形の個数を求めよ。
[解] ${}_{\boxed{8}}\mathrm{C}_{\boxed{4}} = \boxed{70}$　　$\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$

3. １０人の生徒から５人の代表を選ぶとき
(1) 何通りの方法があるか。
(2) 特定の２人ＡＢが必ず選ばれる方法は何通りあるか

> (1) ${}_{\boxed{10}}\mathrm{C}_{\boxed{5}} = \boxed{252}$ ・・・答　　$\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 252$
> (2) 特定の２人を除いた８人から３人選べばいいから ${}_{\boxed{8}}\mathrm{C}_{\boxed{3}} = \boxed{56}$ ・・・答

4. ５人の男子と４人の女子からなるグループから、何人かの代表を選ぶとき、
次の場合の数を求めよ。
(1) ３人の代表を選び出す場合
(2) ３人の代表に特定の男子１人が含まれている場合
(3) 男子３人、女子２人を選び出す場合
(4) 男子４人、女子３人を選び出すのに、特定の男子２人と女子１人が含まれている場合

> (1) ${}_{\boxed{9}}\mathrm{C}_{\boxed{3}} = \boxed{84}$ ・・・答
> (2) 特定の男子１人を除いた８人から２人選べばいいから ${}_{\boxed{8}}\mathrm{C}_{\boxed{2}} = \boxed{28}$ ・・・答
> (3) 男子５人から３人を選ぶ方法は ${}_{\boxed{5}}\mathrm{C}_{\boxed{3}}$ 通り、そのおのおのについて
> 女子４人から２人を選ぶ方法が ${}_{\boxed{4}}\mathrm{C}_{\boxed{2}}$ 通り
> したがって ${}_{\boxed{5}}\mathrm{C}_{\boxed{2}} \times {}_{\boxed{4}}\mathrm{C}_{\boxed{2}} = \boxed{60}$ ・・・答
> (4) 特定の男子２人を除いた男子３人から２人と、特定の女子１人を除いた
> 女子３人から２人を選べばいいので ${}_{\boxed{3}}\mathrm{C}_{\boxed{2}} \times {}_{\boxed{3}}\mathrm{C}_{\boxed{1}} = \boxed{9}$ ・・・答

5. a,b を含む１０人のなかから、５人を選んで円形のテーブルに着席させる方法のうち、
a,b がともに含まれる場合は何通りあるか。

a, b を除いた 8人から 3人選ぶ方法は ${}_8\mathrm{C}_3$
5人を円形に並べる方法は $4!$
${}_8\mathrm{C}_3 \times 4! = 1344$

個数の処理　　(　)組・番号(　)氏名(　　　　　　)NO4

6. ６本の平行線が他の８本の平行線と交わってできる平行四辺形はいくつあるか。

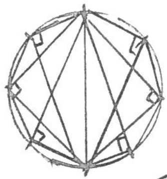
６本の平行線から２本、他の８本の平行線から２本で平行四辺形が１つできるから
求める平行四辺形の個数は　${}_{\boxed{6}}C_{\boxed{2}}\times{}_{\boxed{8}}C_{\boxed{2}}=\boxed{420}$ …答

7. 正八角形について、次のものの個数を求めよ。

(1) 対角線
(2) 正八角形の頂点のうち３個を頂点とする三角形
(3) 直角三角形
(4) もとの八角形と辺を共有しない三角形

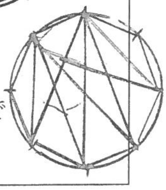
(1) 正八角形の２つの頂点を結ぶ線分は　${}_{\boxed{8}}C_{\boxed{2}}$ 通り、
　そのうち、辺と一致するものが８本あるから　${}_{\boxed{8}}C_{\boxed{2}}-\boxed{8}=\boxed{20}$ …答

(2) ８個の頂点から３個を選べばいいので　${}_{\boxed{8}}C_{\boxed{3}}=\boxed{56}$ …答



(3) ８個の頂点から２個とってできる直径は $\boxed{4}$ 個あり、この１本を辺にもつ
　三角形は $\boxed{6}$ 個できるから、全部で $\boxed{4}\times\boxed{6}=\boxed{24}$ (個)

(4) ２辺を共有する三角形は、頂点１つについて１個できるから $\boxed{8}$ 個



　１辺を共有する三角形は、正八角形の辺１つについて $\boxed{4}$ 個できるから、$8\times\boxed{4}$ 個
　全体から、１辺を共有する三角形と、２辺を共有する三角形の個数を引けばよいので
　$\boxed{16}$ 個…答　　$56-18+32=16$

問題７ １２人の生徒を次のように分ける方法は何通りか

(1) ７人, ５人の２組に分ける。　(2) ４人ずつA, B, Cの３室に入れる。
(3) ４人ずつ３組に分ける。　(4) ５人, ４人, ３人の３組に分ける。
(5) ３人、３人、６人の３組に分ける。

(1) １２人から７人を選ぶ組合せの数に等しいので　${}_{\boxed{12}}C_{\boxed{7}}=\boxed{792}$ …答

(2) １２人から４人選んでAに入れ、残り８人から４人選んでBに入れ、
　最後の４人をCに入れればよいので　${}_{\boxed{12}}C_{\boxed{4}}\times{}_{\boxed{8}}C_{\boxed{4}}=\boxed{34650}$

(3) (2) の総数のうち３組の並べ方だけ同じものがあるので、
　${}_{\boxed{12}}C_{\boxed{4}}\times{}_{\boxed{8}}C_{\boxed{4}}\div\boxed{3}!=\boxed{5775}$

(4) １２人から５人選び、その各々の場合について、残り７人から４人選ぶ場合の数と同じなので
　${}_{\boxed{12}}C_{\boxed{5}}\times{}_{\boxed{7}}C_{\boxed{4}}=\boxed{27720}$

(5) １２人から３人選び、その各々の場合について、　残り9に訂正 ~~8~~人から３人選ぶ場合の数のなかに
　2! だけ同じものがあるので
　${}_{\boxed{12}}C_{\boxed{3}}\times{}_{\boxed{9}}C_{\boxed{3}}\div\boxed{2}!=\boxed{9240}$　　$\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\div2$

個数の処理

(　)組・番号(　)氏名(　　　　　　)NO5

同じものを含む順列

n 個のもののうち p, q, r, ･･･ 個が同じものであるときの順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad ただし、p+q+r+\cdots=n$$

8. YOKOHAMA という語の８文字すべてを並べてできる順列の総数を求めよ。 $\dfrac{\boxed{8}!}{\boxed{2}!\boxed{2}!}=\boxed{10080}$ ･･･答

YKHM

OO AA

9. 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 の７個の数字全部を使ってできる７桁の整数の総数を求めよ。

$$\frac{\boxed{7}!}{\boxed{3}!\boxed{3}!}=\boxed{140}\ \cdots答$$

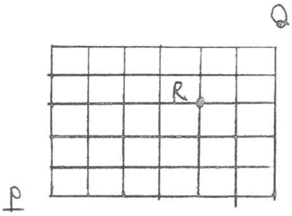
$$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}$$

10. 右図のような道なる町がある。次の場合の最短経路は何通りあるか。次の３つの場合について答えよ。

(1) PからQへ行く場合

(2) 地点Rを通って行く場合

(3) 地点Rを通らないで行く場合



(1) 右へ６区画、上に５区画進むので $\dfrac{\boxed{11}!}{\boxed{6}!\boxed{5}!}=\boxed{462}$ ･･･答

(2) PからRの道順に、RからQの道順を掛ければよいので

$$\frac{\boxed{7}!}{\boxed{4}!\boxed{3}!}\times\frac{\boxed{4}!}{\boxed{2}!\boxed{2}!}=\boxed{210}\ \cdots答 \qquad 35\times6$$

(3) 全部の道順から地点Rを通る道順を引けばよいので $\boxed{462}-\boxed{210}=\boxed{252}$ ･･･答

方程式の自然数解の個数

11. (1) $x+y+z=10$ を満たす自然数解 x, y, z の総数を求めよ。

$x=5$、$y=2$、$z=3$ という解は　○○○○○｜○○｜○○○

１０個の○を１列に並べ、そのすき間９箇所から２箇所を選んで仕切棒｜を入れる方法の総数に等しいから　${}_{\boxed{9}}C_{\boxed{2}}=\boxed{36}$ (通り)

(2) $x+y+z=10$ を満たす整数解 x, y, z の総数を求めよ。

$x=4$、$y=0$、$z=6$ という解は　○○○○｜｜○○○○○○

１０個の○と２個の仕切棒｜を１列に並べる並べ方の総数に等しいから

$$\frac{\boxed{12}!}{\boxed{10}!\boxed{2}!}=\boxed{66}\ (通り)$$

個数の処理　　( )組・番号( )氏名(　　　　)NO6

12. １２個のりんごをを４人に分配する。次の問いに答えよ。

(1) １個ももらわない人があってもよいとして何通りの分け方があるか。

Ａ＝4、Ｂ＝0、Ｃ＝3、Ｄ＝5という解は　○○○○｜｜○○○｜○○○○○

A=4　B=0　C=3　D=5

１２個の○と３個の仕切棒｜を１列に並べる並べ方の総数に等しいから

$$\frac{\boxed{15}!}{\boxed{3}!\boxed{12}!}=\boxed{455}\text{（通り）}$$

(2) １人最低１個はもらうものとして何通りの分け方があるか。

Ａ＝5、Ｂ＝2、Ｃ＝3、Ｄ＝2という解は　○○○○○｜○○｜○○○｜○○ ← 11箇所

A=5　B=2　C=3　D=2

１２個の○を１列に並べ、そのすき間１１箇所から３箇所を選んで仕切棒｜を入れる方法の総数に等しいから　${}_{\boxed{11}}C_{\boxed{3}}=\boxed{165}$（通り）

13. 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 の７個の数字がある。次の問いに答えよ。

(1) ７桁の整数は全部で幾つできるか。

全体の並べ方から１０万の位に０が入る場合を除けばよいので

$$\frac{\boxed{7}!}{\boxed{2}!\boxed{3}!}-\frac{\boxed{6}!}{\boxed{2}!\boxed{3}!}=\boxed{360}\text{（通り）}$$

(2) ７桁の偶数はいくつできるか。

１の位が０のとき、$\frac{\boxed{6}!}{\boxed{2}!\boxed{3}!}=\boxed{60}$（通り）　　1 1 1 2 2 3 0（1の位）

１の位が２のとき、

２を除いた全体の並べ方から１０万の位に０が入る場合を除けばよいので

$$\frac{\boxed{6}!}{\boxed{3}!}-\frac{\boxed{5}!}{\boxed{3}!}=\boxed{100}\text{（通り）}$$

0 1 1 1 2 3 2（1の位）

したがって、$\boxed{60}+\boxed{100}=\boxed{160}$（通り）

14. a, b, c, d, e の５人を A, B の２つの部屋に入れるとき、次の分け方は何通りあるか。

(1) 空室があってよい

a, b, c, d, e の５人は、それぞれ A, B のどの部屋に入ってもよいから、その入り方は２通りずつある。

したがって　$\boxed{2}^{\boxed{5}}=\boxed{32}$（通り）

(2) 空室がない

(1) の場合の中に、全部 A に入る場合と、全部 B に入る場合があるので

$\boxed{2}^{\boxed{5}}-\boxed{2}=\boxed{30}$（通り）