等差数列

(　)組・番号(　)氏名(　　　　　　) NO1

1. 初項 a, 公差 d の等差数列の一般項 a_n は $a_n = a + (n-1)d$

2. 初項から第 n 項までの和 S_n は　$S_n = \frac{n}{2}(a+\ell) = \frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$ (a は初項,ℓ は末項)

3. 数列 a, b, c が等差数列 $\Longleftrightarrow$ $2b = a + c$

1. 公差が -3, 第 6 項が 5 である等差数列の初項を求めよ。また, 第 10 項を求めよ。

初項を a とする

$a + (6-1)\cdot(-3) = 5$

$a - 15 = 5$　　∴ $a = 20$ …答

2. 第 10 項が 49、第 23 項が 10 である等差数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ。

(a) 初項 a と公差 d を求めよ。

$a + 9d = 49$

$a + 22d = 10$

これを解いて　$a = 76,\ d = -3$ …答

(b) -83 はこの数列の第何項か。また、第何項が初めて負になるか。

-83 を第 n 項とすると

$76 + (n-1)\cdot(-3) = -83$

$-3n + 79 = -83$

$3n = 162$　∴ $n = 54$

第54項 …答

$-3n + 79 < 0$

$3n > 79$

$n > \frac{79}{3} = 26.3\cdots$

第27項

(c) 初項から第何項までの和が最大となるか。また、そのときの和を求めよ。

正の項だけの和が最大になるから、第26項までの和が最大

$\frac{26}{2}\{2\times76 + (26-1)\cdot(-3)\} = 13\times77 = 1001$ …答

3. 初項 2, 末項 38, 項数 10 の等差数列の和を求めよ。

$\frac{10}{2}(2+38) = 5\times40 = 200$ …答

4. 初項 3, 公差 2 の等差数列の第 n 項までの和を求めよ。

$\frac{n}{2}\{2\times3 + (n-1)\cdot2\}$

$= \frac{n}{2}(2n+4) = n(n+2)$ …答

5.　$2, 5, 8, \cdots\cdots, 101$ の和を求めよ。

101を第 n 項とすると

$2 + (n-1)\cdot3 = 101$

$3n - 1 = 101$

$3n = 102$　∴ $n = 34$

$\frac{34}{2}(2+101) = 1751$ …答

6. 10 から 100 までの整数で 3 で割ると 2 余る数の和を求めよ。

$3\cdot3+2,\ 3\cdot4+2,\ \cdots\cdots,\ 3\times32+2$

項数は $32-3+1=30$

$\frac{30}{2}(11+98) = 1635$ …答

等比数列

( )組・番号( )氏名( ) NO2

1. 初項 a，公比 r の等比数列の一般項 a_n は $a_n = ar^{n-1}$

2. 初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ （a は初項，r は公比）

$r = 1$ のとき $S_n = na$

3. 数列 a, b, c が等比数列 $\iff$ $b^2 = ac$

1. 公比が 3, 第 5 項が 162 である等比数列の初項 a を求めよ。

$a \cdot 3^{5-1} = 162$

$81a = 162$

$\underline{a = 2}$ …答

2. 等比数列 2, −6, 18, −54, ⋯ の一般項 a_n を求めよ。また，第 7 項を求めよ。

$\underline{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$ …答

$a_7 = 2 \cdot (-3)^6 = \underline{1458}$ …答

3. 第 2 項が 6、第 5 項が 48 である等比数列について次の問に答えよ。

(a) 初項 a と公比 r を求めよ。

$ar = 6$ …①

$ar^4 = 48$ …②

②より $ar^4 = ar \cdot r^3 = 6r^3 = 48$

$r^3 = 8$ ∴ $a = 2$ ①より $r = 3$

$\underline{a = 2,\ r = 3}$ …答

(b) 一般項 a_n を求めよ。

$\underline{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$ …答

4. 初項 9, 公比 −3 の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\dfrac{9\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \underline{\dfrac{9}{4}\{1-(-3)^n\}}$ …答

5. 等比数列 1, −3, 9, −27, ⋯ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\dfrac{1-(-3)^n}{1-(-3)} = \dfrac{1}{4}\{1-(-3)^n\}$

6. 第 2 項が 2, 初項から第 3 項までの和が 7 である等比数列の，初項 a と公比 r を求めよ。

$ar = 2$ …①

$a + ar + ar^2 = 7$ …②

②より $a(1+r+r^2) = 7$

両辺に r を掛けて

$ar(1+r+r^2) = 7r$

①より $ar = 2$

$2(1+r+r^2) = 7r$

$2r^2 - 5r + 2 = 0$

$(2r-1)(r-2) = 0$

$r = \frac{1}{2}, 2$

①より $r = \frac{1}{2}$ のとき $a = 4$

$r = 2$ のとき $a = 1$

$\underline{a = 4,\ r = \frac{1}{2} \text{ または } a = 1,\ r = 2}$ …答

3を入れる

7. 初項が 2, 公比がである等比数列において，初めて 1000 より大きくなるのは第何項か。

第 n 項で初めて1000より大きくなるとすると

$2 \cdot 3^{n-1} > 1000$

$3^{n-1} > 500$

$3^5 = 243,\ 3^6 = 729$ より

$n-1 = 6$ のとき初めて3より大きくなる

∴ $n = 7$

$\underline{第7項}$ …答

【和の記号 $\sum$】　　　　( )組・番号( )氏名( ) NO3

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　　4. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

1．次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}3$$

$$= 4\cdot\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)} + 3\boxed{n} = 2n(n+1)+3n$$

$$= n\{2(n+1)+3\}$$

$$= \underline{n(2n+5)}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(2k-3)$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$

$$= n(n+1)-3n$$

$$= n\{(n+1)-3\}$$

$$= \underline{n(n-2)}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} + \boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{6}}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+\boxed{3}\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) = \underline{\frac{1}{\boxed{3}}n(n+1)\boxed{(n+2)}}$$

(4) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{9}{6}n(n+1)+\frac{12}{6}n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+12\}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2-3n+2)$$

$$= \underline{\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)}$$

(5) 次の数列の和 S を求めよ。

(a) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k = \boxed{k(2k-1)=2k^2-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k) = 2\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= 2\cdot\boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} - \boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{\boxed{3}}{6}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-\boxed{3}\}$$

$$= \underline{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$$

(b) $(1+1^3)+(2+2^3)+(3+3^3)+\cdots+(n+n^3)$

この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k = k+k^3$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+k^3) = \frac{1}{2}n(n+1)+\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$= \frac{2}{4}n(n+1)+\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{2+n(n+1)\}$$

$$= \underline{\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+2)}$$

【和の記号 $\sum$】　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組・番号(　　)氏名(　　　　　　　　)NO4

1．次の数列の第k項 a_k を求め、初項から第n項までの和を求めよ。

(1) $1 \mid 3, 2 \mid 5, 3 \mid 7, 4 \mid 9, \cdots$

$1 \; , \; 2 \; , \; 3 \; , \; 4 \; , \cdots\cdots k$
$3 \; , \; 5 \; , \; 7 \; , \; 9 \; , \cdots\cdots \; 3+(k-1)\cdot 2 = 2k+1$

$a_k = k(2k+1) = 2k^2+k$

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k) = 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$
$= \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{3}{6}n(n+1)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)+3\}$
$= \underline{\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)}$

(2) $1^2\cdot 2, 2^2\cdot 3, 3^2\cdot 4, 4^2\cdot 5, \cdots$

$a_k = k^2(k+1) = k^3+k^2$

$\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2) = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
$= \frac{3}{12}n^2(n+1)^2+\frac{2}{12}n(n+1)(2n+1)$
$= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}$
$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)$
$= \underline{\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)}$

(3) $2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8, \cdots, 2+4+6+\cdots+2n$

$a_k = 2+4+6+\cdots\cdots+2k = \frac{1}{2}k(2k+2) = k^2+k$

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{3}{6}n(n+1)$
$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$
$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$
$= \underline{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$

(4) $1, 1+4, 1+4+7, \cdots\cdots, 1+4+7+\cdots+(3n-2)$

$a_k = 1+3+5+\cdots\cdots+(3k-2) = \frac{1}{2}k\{1+(3k-2)\}$
$= \frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n(n+1)$
$= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n(n+1)$
$= \frac{1}{4}n(n+1)\{(2n+1)-1\}$
$= \underline{\frac{1}{2}n^2(n+1)}$

分数数列の和

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \qquad \frac{1}{(2n-1)(2n+1))} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

2．次の数列の和Sを求めよ。

(1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$S = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$
$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$S = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$
$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$
$= \underline{\frac{n}{2n+1}}$

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n = a_{n+1} - a_n$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

1．次の数列の一般項 a_n を求めよ。

(a) $1, 4, 11, 22, 37, 56, \cdots$

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、

$\{b_n\}$ は $3, 7, \boxed{11}, \boxed{15}, \boxed{19}, \cdots$　　$3+(n-1)\cdot 4$

となり、第 n 項 b_n は，$b_n = \boxed{4n-1}$

したがって、$n \geqq 2$ のとき、

$a_n = \boxed{a_1} + \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} (\boxed{4k-1})$

$= \boxed{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} n(n \boxed{-} 1) - (n \boxed{-} 1)$

ゆえに、　$a_n = \boxed{2n^2-3n+2}$

これは、$\boxed{n=1}$ のときにも成り立つ。

よって、$a_n = \boxed{2n^2-3n+2}$ … 答

(b) $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{b_n\}$ は $2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$

$b_n = 2+(n-1)\cdot 1 = n+1$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$= 1 + \frac{1}{2} n(n-1) + n - 1$

$= \frac{n^2+n}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

$a_n = \frac{n^2+n}{2}$

(c) $10, 8, 4, -2, -10, \cdots$

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{b_n\}$ は $-2, -4, -6, -8, \cdots\cdots$

$b_n = -2+(n-1)\cdot(-2) = -2n$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} -2k$

$= 10 - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$

$= -n^2 + n + 10$

これは $n=1$ のときも成り立つ

よって $a_n = -n^2+n+10$

(d) $1, 2, 5, 14, 41, \cdots$

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{b_n\}$ は $1, 3, 9, 27, \cdots\cdots$

$b_n = 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$= 1 + (1 + 3 + 3^2 + \cdots\cdots + 3^{n-1})$

$= 1 + \frac{3^{n-1}-1}{3-1}$

$= \frac{3^{n-1}+1}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ

よって　$a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$

【数列の和と一般項】　　　　(　)組・番号(　)氏名(　　　　　　　) NO6

> 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、
> $a_1 = S_1$　　$n \geqq 2$のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

1. 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表されるとき、数列の一般項 a_n を求めよ。

(a) $S_n = 2n^2 - n$

[解] $\boxed{n \geqq 2}$のとき、

$a_n = S_{\boxed{n}} - S_{\boxed{n-1}}$

$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= (2n^2 - n) - (2n^2 - 5n + 3)$

$= 4n - 3$

$\boxed{n=1}$のときは　$a_1 = \boxed{S_1} = \boxed{1}$

よって、$\boxed{n=1}$のときも成り立つ。

したがって、一般項は　$a_n = \boxed{4n-3}$ …答

(b) $S_n = n^2 + 4n$

$n \geqq 2$のとき

$a_n = n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$

$= n^2+4n-(n^2+2n-3)$

$= 2n+3$

$n=1$のときは　$a_1 = S_1 = 5$

よって $n=1$のときも成り立つ

したがって $a_n = 2n+3$ …答

(c) $S_n = n^3 + 2n + 6$

$n \geqq 2$のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^3+2n+6) - \{(n-1)^3+2(n-1)+6\}$

$= (n^3+2n+6) - (n^3-3n^2+5n+3)$

$= 3n^2-3n+3$

$= 3(n^2-n+1)$

$n=1$のときは　$a_1 = S_1 = 9$

よって $n=1$のときは成り立たない

$a_1 = 9$,　$n \geqq 2$のとき $a_n = 3(n^2-n+1)$ …答

(d) $S_n = n \cdot 2^n$

$n \geqq 2$のとき

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n \cdot 2^n - (n-1) \cdot 2^{n-1}$

$= n \cdot 2 \cdot 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-1}$

$= \{2n-(n-1)\} 2^{n-1}$

$= (n+1) 2^{n-1}$

$n=1$のときは　$a_1 = S_1 = 2$

【漸化式練習１】

(　　)組・番号(　　)氏名(　　　　　　　　　　　)NO1

1. 等差数列を表す漸化式	$a_{n+1} = a_n + d \iff a_n = a_1 + (n-1)d$	
2. 等比数列を表す漸化式	$a_{n+1} = ra_n \iff a_n = a_1 r^{n-1}$	

1. 次の条件によって定義される数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$

初項 $\boxed{2}$、公差 $\boxed{3}$ の等差数列だから

$\boxed{a_n = 2+(n-1)\cdot 3 = 3n-1}$

(2) $a_1 = 2, a_{n+1} = -3a_n$

初項 $\boxed{2}$、公比 $\boxed{-3}$ の等比数列だから

$\boxed{a_n = 2\cdot(-3)^{n-1}}$

(3) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 5$

$a_n = 3+(n-1)\cdot 5$

$= \underline{5n-2}$

(4) $a_1 = 2, a_{n+1} - a_n = -3$

$a_n = 2+(n-1)\cdot(-3) = -3n+5$

(5) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$

$a_n = 2\cdot 3^{n-1}$

(6) $a_1 = 1, a_{n+1} = -2a_n$

$a_n = (-2)^{n-1}$

【階差形式の漸化式】

$$a_{n+1} - a_n = b_n\ (n\text{ の式}) \iff n \geqq 2\text{ のとき、}a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} - a_n = 2n+1$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、

$b_n = a_{n+1} - a_n = 2n+1$ だから

$n \geqq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} (\boxed{2k+1})$$

$$= 2 + \boxed{2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)} + \boxed{(n-1)}$$

$$= \boxed{n^2+1}$$

これは、$\boxed{n=1}$ のときも成り立つ。

答 $\boxed{a_n = n^2+1}$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n - 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)$$

$$= 1 + 3\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)$$

$$= \frac{2+3n^2-3n-2n+2}{2}$$

$$= \frac{3n^2-5n+4}{2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\therefore\ a_n = \frac{3n^2-5n+4}{2}$$

【漸化式練習２】

(　　)組・番号(　　)氏名(　　　　　　　　　　)NO2

【隣接２項間の漸化式】

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1, q \neq 0)$　このとき、$a_n - c = p(a_{n-1} - c) = p^{n-1}(a_1 - c)$

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_{\boxed{n}} = 3a_{\boxed{n-1}} + 2 \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$

$c = 3c + 2 \therefore c = -1$

両辺に$\boxed{1}$を加えて

$a_n + \boxed{1} = 3(a_{n-1} + \boxed{1})$

$a_n + \boxed{1} = 3^{\boxed{n-1}}(a_{\boxed{1}} + \boxed{1})$

$a_n + \boxed{1} = \boxed{2} \cdot 3^{\boxed{n-1}}$

$a_n = \boxed{2} \cdot 3^{\boxed{n-1}} - \boxed{1}$

(2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 4a_n - 3$

$a_n = 4a_{n-1} - 3 \quad (n=2,3,4,\cdots)$

$c = 4c - 3 \therefore c = 1$

両辺から1を引いて

$a_n - 1 = 4(a_{n-1} - 1)$

$a_n - 1 = 4^{n-1}(a_1 - 1)$

$a_n - 1 = 4^{n-1}$

$\underline{a_n = 4^{n-1} + 1}$

2. 次の条件によって定義される数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2$

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2$

$= \underline{2n}$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n$

$a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$

$= \underline{2^n}$

(3) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$

$n \geqq 2$のとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$

$= 3 + (1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^{n-2})$

$= 3 + \dfrac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$

$= 2^{n-1} + 2$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$\therefore \underline{a_n = 2^{n-1} + 2}$

(4) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + 2n^2 + n - 1$

$n \geqq 2$のとき

$a_n = 5 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2 + k - 1)$

$= 5 + 2 \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) - (n-1)$

$= \dfrac{4n^3 - 3n^2 - 7n + 36}{6}$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$a_n = \dfrac{4n^3 - 3n^2 - 7n + 36}{6}$

(5) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

$a_n = 2a_{n-1} - 3 \quad (n=2,3,4,\cdots)$

$c = 2c - 3 \therefore c = 3$

両辺から3を引いて

$a_n - 3 = 2(a_{n-1} - 3)$

$a_n - 3 = 2^{n-1}(a_1 - 3)$

$a_n - 3 = 2 \cdot 2^{n-1}$

$\underline{a_n = 2^n + 3}$

(6) $a_1 = 1,\ 3a_{n+1} = a_n - 6$

$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n - 2$

$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} - 2 \quad (n=2,3,4,\cdots)$

$c = \frac{1}{3} c - 2 \therefore c = -3$

両辺に3を加えて

$a_n + 3 = \frac{1}{3}(a_{n-1} + 3)$

$a_n + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1 + 3)$

$a_n + 3 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\underline{a_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3}$

【漸化式練習３】

（　）組・番号（　）氏名（　　　　　　　）NO 3

等差数列の応用型

(1) $a_1 = 3,\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$

$b_n = \boxed{\dfrac{1}{a_1}}$ とおくと、$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$b_{\boxed{n+1}} = b_{\boxed{n}} + 1$

数列 $\{b_n\}$ は、初項 $\dfrac{1}{3}$、公差 1 の等差数列

$b_n = \boxed{1 + (n-1)\cdot\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3n-2}{3}$

$a_n = \dfrac{1}{\boxed{b_n}} = \boxed{\dfrac{3}{3n-2}}$

(2) $a_1 = 2,\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 3$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{2}$

$b_{n+1} = b_n + 3$

$b_n = \dfrac{1}{2} + (n-1)\cdot 3 = \dfrac{1+6n-6}{2}$

$= \dfrac{6n-5}{2}$

$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{2}{6n-5}$

【隣接２項間の漸化式の応用型 】

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{3}{a_n} + 2$

$b_n = \boxed{\dfrac{1}{a_n}}$ とおくと、$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \boxed{2}$

$b_{\boxed{n+1}} = 3b_{\boxed{n}} + 2$

$b_n = 3b_{n-1} + 2\ (n=2,3,4\cdots)$

$c = 3c + 2 \quad \therefore \quad c = -1$ 両辺に1を加えて

$b_{\boxed{n}} \boxed{+} \boxed{1} = 3(b_{\boxed{n-1}} \boxed{+} \boxed{1})\ (n = 2, 3, 4 \cdots)$

$= 3^{\boxed{n-1}}(b_{\boxed{1}} \boxed{+} \boxed{1})$

$= \boxed{3} \cdot 3^{\boxed{n-1}}$

$= \boxed{3}^{\boxed{n}} \qquad \therefore b_n = \boxed{3^n - 1}$

$a_n = \dfrac{1}{\boxed{b_n}} = \boxed{\dfrac{1}{3^n - 1}}$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 2}$

逆数を考えて

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n + 2}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{a_n} + 1$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 2$

$b_{n+1} = 2b_n + 1$

$b_n = 2b_{n-1} + 1 \quad (n = 2, 3, 4 \cdots)$

$c = 2c + 1 \quad \therefore c = -1$

両辺に1を加えて

$b_n + 1 = 2(b_{n-1} + 1)$

$= 2^{n-1}(b_1 + 1)$

$= 3\cdot 2^{n-1}$

$\therefore \quad b_n = 3\cdot 2^{n-1} - 1$

$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1} - 1}$

2 年数学公式テスト解答

( ) 組・番号 ( ) 氏名 ( )

1. 次の公式を書け。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \boxed{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boxed{\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$

2. 次の数列の一般項を求めよ。

(1) 初項 a、公差 d の等差数列の一般項は、

$\boxed{a_n = a + (n-1)d}$

(2) 初項 a、公比 r の等比数列の一般項は

$\boxed{a_n = ar^{n-1}}$

3. a, b, c のあいだに成り立つ関係式を求めよ。

(1) 数列 a, b, c が等差数列であるとき、

$\boxed{2b = a + c}$

(2) 数列 a, b, c が等比数列であるとき、

$\boxed{b^2 = ac}$

4. 初項 a、公差 d、末項 ℓ、項数 n の等差数列の和を S_n とする。

(1) $S_n = \boxed{\frac{1}{2}n\left\{2a + (n-1)d\right\}}$

(2) $S_n = \boxed{\frac{1}{2}n(a+\ell)}$

5. 初項 a、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は、

(1) $r \neq 1$ のとき、$S_n = \boxed{\dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$

(2) $r = 1$ のとき、$S_n = \boxed{na}$

6. 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項を b_n とすると、

$$\boxed{n \geqq 2 \text{ のとき、} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

7. 次の公式を書け。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 1 = \boxed{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \boxed{\frac{1}{2}n(n-1)}$

8. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、第 n 項 a_n は、

$$a_1 = S_1$$

$$n \geqq 2 \text{ のとき、} a_n = S_n - S_{n-1}$$