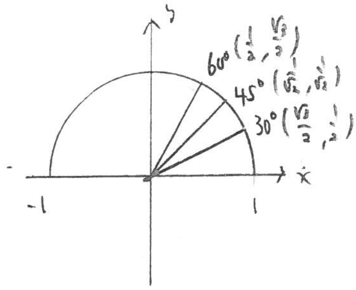
# 三角比公式

(　　)組・番号(　　)氏名(　　　　　)

1. 次の表を完成せよ。

| θ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin θ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| cos θ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| tan θ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | / | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |




2. 次のかっこ内を完成せよ。

(a) **90° − θ、180° − θ の三角比、三角比の相互関係**

(1) $\sin(90° - \theta) = \boxed{\cos\theta}$　(2) $\cos(90° - \theta) = \boxed{\sin\theta}$　(3) $\tan(90° - \theta) = \boxed{\frac{1}{\tan\theta}}$

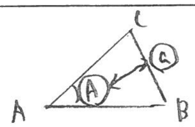
(4) $\sin(180° - \theta) = \boxed{\sin\theta}$　(5) $\cos(180° - \theta) = \boxed{-\cos\theta}$　(6) $\tan(180° - \theta) = \boxed{-\tan\theta}$

(7) $\tan\theta = \boxed{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　(8) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \boxed{1}$　(9) $1 + \tan^2\theta = \boxed{\frac{1}{\cos^2\theta}}$

(b) **正弦定理**

三角形 ABC の外接円の半径を R とすると

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

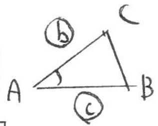



(c) **余弦定理**

$a^2 = \boxed{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

$b^2 = \boxed{c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$

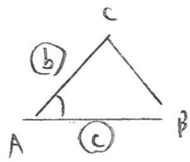
$c^2 = \boxed{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$




$\cos A = \boxed{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$

$\cos B = \boxed{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}$

$\cos C = \boxed{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$



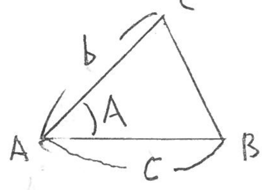

(d) **角と辺の関係**

$A < 90° \iff \boxed{a^2 < b^2 + c^2}$　$A = 90° \iff \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$　$A > 90° \iff \boxed{a^2 > b^2 + c^2}$

(e) **面積定理**

三角形 ABC の面積を S とすると

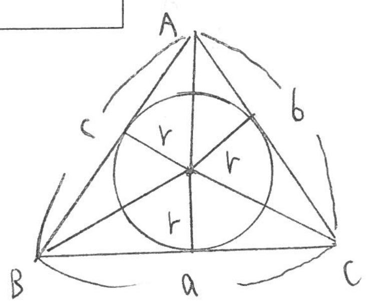
$$\boxed{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$$




(f) **内接円の半径 r と面積**

三角形 ABC の面積を S、内接円の半径を r とすると

$$S = \boxed{\frac{1}{2}r(a+b+c)}$$



# 三角形への応用

(　)組・番号(　)氏名(　　　　)NO1

**正弦定理**　△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

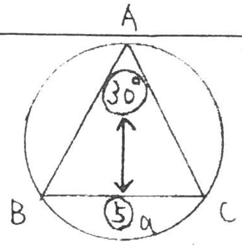
**1つの角と向かい合う辺の長さ ⇒ 正弦定理**

問1 △ABC において、外接円の半径を R とする。次のものを求めよ。

(1) $a = 5, A = 30°$ のとき、外接円の半径 R を求めよ。

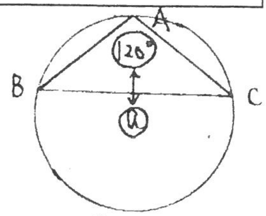
$\frac{5}{\sin 30°} = 2R$

$R = \frac{5}{2\sin 30°} = \frac{5}{2 \times \frac{1}{2}} = \underline{5}$ …答




(a) $A = 120°$、外接円の半径 $R = 10$ のときの a を求めよ。

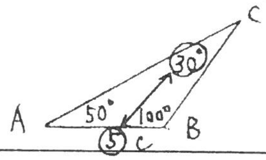
$\frac{a}{\sin 120°} = 2R$　$a = 2R\sin 120° = 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{10\sqrt{3}}$ …答




(b) $A = 50°$、$B = 100°$、$c = 5$ のとき外接円の半径 R を求めよ。

$C = 180° - (50° + 100°) = 30°$

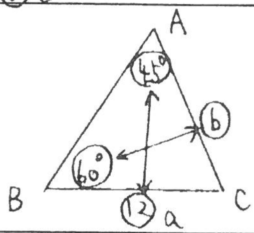
$\frac{5}{\sin 30°} = 2R$　$R = \frac{5}{2\sin 30°} = \frac{5}{2 \times \frac{1}{2}} = \underline{5}$ …答




(2) $a = 12, A = 45°, B = 60°$ のとき、b を求めよ。

$\frac{b}{\sin 60°} = \frac{12}{\sin 45°}$

$b = \frac{12}{\sin 45°} \sin 60° = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{6\sqrt{6}}$ …答




(c) $a = 1, c = \sqrt{3}, C = 120°$ のとき、A を求めよ。

逆数を考えた

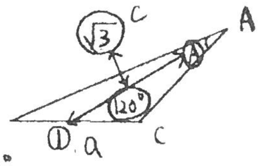
$\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120°}$

$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin 120°}{\sqrt{3}}$

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

$\sin A = \frac{1}{2}$ だから

$C = 120°$ より $0° < A < 60°$　答 $\underline{A = 30°}$




(3) $a = R$ のときの A を求めよ。

$\frac{a}{\sin A} = 2R$　$a = 2R\sin A$　$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

答 $\underline{A = 30°, 150°}$

(d) $a = 2$、外接円の半径 $R = 2$ のときの A

$\frac{2}{\sin A} = 2 \times 2$

$\frac{2}{\sin A} = 4$

$\sin A = \frac{1}{2}$　答 $\underline{A = 30°, 150°}$

# 三角形への応用

(　　) 組・番号 (　　) 氏名 (　　　　　　　) NO2

**余弦定理 (1)**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

**余弦定理 (2)**

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

**2つの辺の長さとそのはさむ角 ⇒ 余弦定理 (1)**

**3辺の長さ ⇒ 余弦定理 (2)**

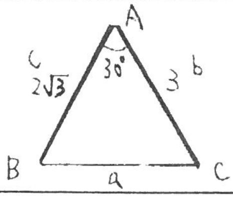
問 1 △ABC について、次の問に答えよ。

(1) $b = 3, c = 2\sqrt{3}, A = 30°$ のとき、$a$ を求めよ。

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 30°$
$= 3^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
$= 9 + 12 - 18 = 3$

$a>0$ だから

$a = \sqrt{3}$ …答

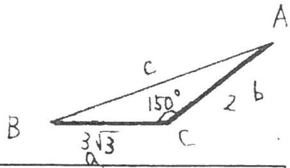



(a) $a = 3\sqrt{3}, b = 2, C = 150°$ のとき $c$ を求めよ。

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 150°$
$= (3\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 27 + 4 + 18 = 49$

$c>0$ だから

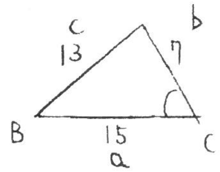
$c = 7$ …答




(2) $a = 15, b = 7, c = 13$ のとき、$C$ を求めよ。

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
$= \frac{15^2 + 7^2 - 13^2}{2\cdot 15\cdot 7}$
$= \frac{1}{2}$

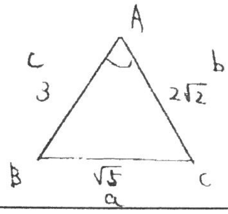
答 $C = 60°$




(b) $a = \sqrt{5}, b = 2\sqrt{2}, c = 3$ のとき、$A$ を求めよ。

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$= \frac{(2\sqrt{2})^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

答 $A = 45°$

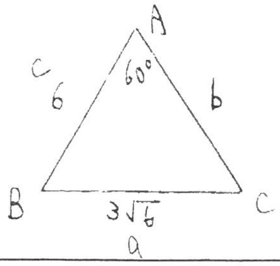



**余弦定理の応用形**

(3) $a = 3\sqrt{6}, c = 6, A = 60°$ のときの $b$ を求めよ。

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°$
$(3\sqrt{6})^2 = b^2 + 6^2 - 2\cdot b\cdot 6\cdot\frac{1}{2}$
$54 = b^2 + 36 - 6b$

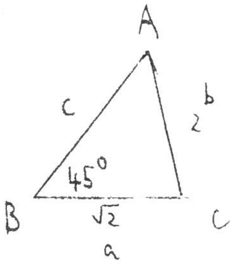
$b^2 - 6b - 18 = 0$
$b = 3 \pm 3\sqrt{3}$
$b>0$ だから $b = 3 + 3\sqrt{3}$ - 答




(c) $a = \sqrt{2}, b = 2, B = 45°$ のときの $c$ を求めよ。

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos 45°$
$2^2 = c^2 + (\sqrt{2})^2 - 2c\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
$c^2 - 2c - 2 = 0$

$c = 1 \pm \sqrt{3}$
$c>0$ だから
$c = 1 + \sqrt{3}$ …答



**面積定理**　△ABC の面積を S とすると

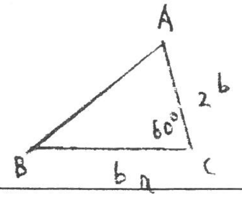
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

**２つの辺の長さとはさむ角の正弦 ⇒ 面積定理**

(1) $a=6, b=2, C=60°$ のとき、△ABC の面積を求めよ。

△ABCの面積をSとすると

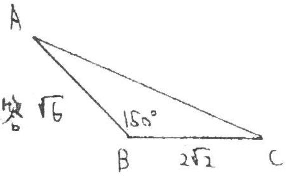
$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{3\sqrt{3}}$ …答




(a) $a=2\sqrt{2}, c=\sqrt{6}, B=150°$ のとき、△ABC の面積を求めよ。

△ABCの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}\sin 150°=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\underline{\sqrt{3}}$ …答

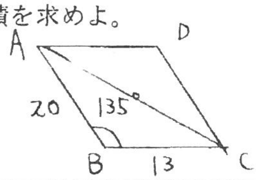



(b) $AB=20$、$BC=13$、$\angle ABC=135°$ である平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

平行四辺形ABCDの面積Sは

$S=2\triangle ABC=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 13\cos 135°$

$=20\cdot 13\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{130\sqrt{2}}$ …答




(2) 3辺の長さが $a=5, b=6, c=7$ である△ABC の面積を求めよ。

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\frac{5}{7}$

$\sin A>0$ だから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

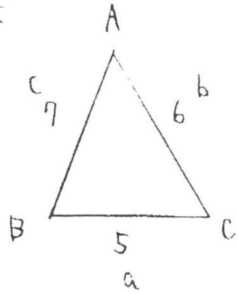
$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{(7+5)(7-5)}}{7}=\frac{\sqrt{24}}{7}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

△ABCの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$=\underline{6\sqrt{6}}$ …答




(c) 3辺の長さが $a=6, b=3, c=5$ である△ABC の面積を求めよ。

$\cos A=\frac{3^2+5^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 5}$

$=\frac{9+25-36}{2\cdot 3\cdot 5}=-\frac{1}{15}$

$\sin A>0$ だから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{15}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{(15+1)(15-1)}}{15}$

$=\frac{\sqrt{16\cdot 14}}{15}=\frac{4\sqrt{14}}{15}$

△ABCの面積Sは

$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{4\sqrt{14}}{15}$

$=\underline{2\sqrt{14}}$ …答